Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 3 (MA-1116)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Abril-Julio 2024

Sección 2, Tipo A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **(Valor: 4 ptos.)** Demuestre que los vectores $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^2$ dados según

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forman una base ortogonal $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ bajo el producto interno usual. luego, exprese el vector

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

como una combinación lineal de dichos vectores $\boldsymbol{v}_i$ y proporcione el vector coordenada $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}}$.

2. **(Valor: 4 ptos.)** Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases dadas en $\mathbb{P}_2$ según

$$\mathcal{B}_1 = \left\{1 + x + x^2,\ x + x^2,\ x^2\right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{1,\ x,\ x^2\right\}.$$

Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Luego, escribir el polinomio

$$p(x) = 1 + x^2$$

de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

3. **(Valor: 9 ptos.)**

   a) **(4 ptos)** Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido según

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x = 2t,\ y = -t,\ z = \frac{t}{2} \right\}$$

   Encuentre el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W y determine una base para $W^{\perp}$.

b) **(5 ptos.)** Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ definido según

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Determine la descomposición ortogonal de $\boldsymbol{v}$ respecto al subespacio W dado por

$$W = \operatorname{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

4. **(Valor: 9 ptos.)**

a) **(4 ptos.)** Sea V un espacio vectorial y $\langle , \rangle$ un producto interno en V. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$. Demuestre la siguiente proposición

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2.$$

b) **(5 ptos.)** Considere la siguiente base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Aplique el método de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ y obtenga una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$ usando el siguiente producto interno:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2, \quad \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2.$$

5. **(Valor: 9 ptos.)**

a) **(4 ptos.)** Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determine

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

b) **(5 ptos.)** Sea $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal definida según

$$T(A) = AB - BA, \quad \text{donde} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halle la matriz de transformación A_T respecto a la base canónica de $M_{2\times 2}$. Luego, calcule

$$T(v), \quad \text{con} \quad v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

usando la matriz de transformación A_T.

Solución

1. La ortogonalidad de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ puede verificarse directamente calculando

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Puesto que ambos vectores, al ser ortogonales, son linealmente independientes, éstos forman una base ortogonal $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego, observe que

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w},$$

Y por ende, la representación de $\boldsymbol{w}$ respecto a la base $\mathcal{B}$ ha de ser precisamente el vector columna cuyas entradas sean los coeficientes de la expresión anterior:

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Antes de proceder, observe que la base $\mathcal{B}_2$ es simplemente la base canónica de $\mathbb{P}_2$. Así, el problema consiste hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a la base canónica $\mathcal{C}$. Primero, definamos

$$b_1(x) = 1 + x + x^2, \quad b_2(x) = x + x^2, \quad b_3(x) = x^2.$$

Vea que los elementos de $\mathcal{B}_2$ pueden poseen representaciones en la base canónica dada según

$$[b_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [b_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [b_3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, podemos construir la matriz de cambio de base requerida usando estas representaciones como las columnas de la matriz. Es decir, la matriz de cambio de base Q de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ (la base canónica, $\mathcal{C}$) es dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, vea que $p(x)$ puede representarse sobre $\mathcal{B}_1$ como

$$p(x) = b_1(x) - b_2(x) + b_3(x),$$

y por tanto

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando esta representación matricial, podemos recuperar su representación sobre $\mathcal{B}_2$ (la base canónica) efectuando

$$Q[p]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [p]_{\mathcal{C}} = [p]_{\mathcal{B}_2}.$$

Esta representación coincide perfectamente con la definición de $p(x)$ provista en el enunciado.

3. *a*) Para determinar el complemento ortogonal de W, nos será clave la siguiente observación: note que[1]

$$W = \text{gen}\left(\{\boldsymbol{b}\}\right), \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, W es generado por un único vector, y podemos afirmar que

$$\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{b}\}$$

es una base para W. Ahora, como los operadores de proyección sobre subespacios vectoriales son transformaciones lineales, determinar el complemento ortogonal de W es equivalente a encontrar el núcleo del operador de proyección sobre W. Es decir,

$$W^{\perp} = \ker\left(\text{Proj}_W\right).$$

Al ser generado W por un único vector,

$$\text{Proj}_W = \text{proj}_{\boldsymbol{b}},$$

y entonces $\ker\left(\text{Proj}_W\right)$ es caracterizado por el conjunto de vectores ortogonales a $\boldsymbol{b}$. Éstos vectores son aquellos de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad 4x - 2y + z = 0.$$

[1]Esto es un resultado directo de la definición de W

En resumen,

$$\ker\left(\mathrm{Proj}_W\right) = \mathrm{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Como ambos vectores son linealmente independientes entre sí, éstos forman una base $\mathcal{B}_{W^\perp}$ dada por

$$\mathcal{B}_{W^\perp} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} = \{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}.$$

para $\ker\left(\mathrm{Proj}_W\right)$ y, por extensión, para $W^\perp$.

b) Primero, vea que a partir del conjunto generador dado para W podemos construir una base ortonormal para W,

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Sean $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ los vectores de esta base $\mathcal{B}$. De aquí que la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre W resulta

$$\mathrm{Proj}_W(\boldsymbol{v}) = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}) + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{w}_2}(\boldsymbol{v}) = \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1\rangle\,\boldsymbol{w}_1 + \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2\rangle\,\boldsymbol{w}_2,$$

donde

$$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1\rangle\,\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\quad \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2\rangle\,\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathrm{Proj}_W(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}2\\1\\5\\3\end{pmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

Para determinar la proyección sobre $W^\perp$, observe que $\boldsymbol{v} \in W$ y por tanto $\boldsymbol{v} \notin W^\perp$. Como consecuencia,

$$\mathrm{Proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}.$$

Finalmente, obtenemos la descomposición ortogonal deseada

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{Proj}_W(\boldsymbol{v}) + \mathrm{Proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0}.$$

4. *a*) Si la ha visto anteriormente en sus estudios, reconocerá que esta expresión es la versión vectorial de la *regla del paralelogramo* para espacios con producto interno. Para demostrar que la igualdad es válida, basta con expandir cada término del lado derecho de la igualdad por separado. En particular,

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2\right).$$

De forma similar,

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2\right).$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$$

Finalmente, los términos $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ se cancelan y obtenemos la igualdad deseada,

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

b) Sean

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nuestro objetivo sera determinar dos vectores $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2' \in \mathbb{R}_2$ tales que formen una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$ respecto a $\langle , \rangle$. Para empezar el procedimiento de ortonormalización, tomemos

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \quad \text{donde} \quad \|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$$

es la norma inducida por el producto interno definido anteriormente. Así,

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, siguiendo el procedimiento de Gram-Schmidt, sea

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1'}(\boldsymbol{v}_2).$$

Puesto que $\boldsymbol{v}_1'$ es ya un vector unitario respecto a la norma inducida, la proyección a calcular se reduce a

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1'}(\boldsymbol{v}_2) = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1' \rangle \, \boldsymbol{v}_1' = \sqrt{2}\, \boldsymbol{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto,

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1'}(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, tomando

$$\boldsymbol{v}_2' = \frac{\boldsymbol{w_2}}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos la base ortonormal requerida

$$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1',\, \boldsymbol{v}_2'\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. *a*) En virtud de que T es una transformación lineal, observe como

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= aT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por ende, podemos afirmar directamente que

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2a+b \\ 3a \end{pmatrix}$$

y como consecuencia

$$T \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

b) Para determinar la matriz de transformación A_T de T, basta con considerar la acción de T sobre los elementos de la base canónica $\mathcal{C}$ de $M_{2\times 2}$, dados por

$$\boldsymbol{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efectuando los cálculos y escribiendo el resultado en términos de la base canónica,

$$T(\boldsymbol{e}_{11}) = -\boldsymbol{e}_{12} + \boldsymbol{e}_{21}, \quad T(\boldsymbol{e}_{12}) = -\boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{22},$$
$$T(\boldsymbol{e}_{21}) = \boldsymbol{e}_{11} - \boldsymbol{e}_{22}, \quad T(\boldsymbol{e}_{22}) = \boldsymbol{e}_{12} - \boldsymbol{e}_{21}.$$

A partir de estos resultados, obtenemos que A_T resulta

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recuerde que esta matriz opera sobre los vectores coordenada correspondientes a elementos de $M_{2\times 2}$, escritos respecto a su base canónica. Finalmente, $T(\boldsymbol{v})$ puede calcularse mediante el vector coordenada de $\boldsymbol{v}$ respecto a la base canónica empleando la matriz de transformación. Así,

$$A_T[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b \\ d-a \\ a-d \\ b-c \end{pmatrix}$$

y por ende

$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}.$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Samuel Alonso** para **GECOUSB**

Samuel Alonso
14-10028
Lic. en Física

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **alonso.smontenegro@gmail.com**